MINISTERE DE L'EQUIPEMENT, DU LOGEMENT,
DES TRANSPORTS ET DU TOURISME

CONCOURS COMMUN 1996
ENTPE, ENSG, ENTM, ENSTIMD,

Banque de notes pour le concours EIVP

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES OPTION

Temps accordé : 4 heures

(4 pages)

NOTATIONS

Pour p et q entiers de $\mathbf{N}$, avec $p \leq q$, $[\![p, q]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris au sens large entre p et q.

E désigne un espace vectoriel de dimension finie n, $n \geq 2$, sur le corps $\mathbf{K}$, avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$;
Dans tout le problème f désigne un endomorphisme de E ; on a $f^2 = f \circ f$ et de même $f^{k+1} = f^k \circ f$;
I désigne l'identité et $\mathbf{O}$ désigne l'application nulle.
Par convention, $f^0 = \mathrm{I}$.

Si $R \in \mathbf{K}[X]$, $R(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_p X^p$, on note $R(f)$ l'endomorphisme $a_0 \mathrm{I} + a_1 f + ... + a_p f^p$.
On note alors $\mathbf{K}[f]$ l'algèbre des polynômes de f. C'est-à-dire $\mathbf{K}[f] = \{R(f) / R \in \mathbf{K}[X]\}$.
On note $P_f(X) = \det(f - XI)$, le polynôme caractéristique de f et <u>on rappelle que $P_f(f) = \mathbf{O}$</u>.

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on pourra également introduire le polynôme caractéristique de M défini par $P_M(X) = \det(M - XI_n)$ où I_n est la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

On dit que f est <u>cyclique</u> si, et seulement si, il existe x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

On appelle <u>commutant</u> de f, l'ensemble $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g = g \circ f\}$

<u>On admettra que $\mathcal{C}(f)$ est une algèbre de dimension au moins n sur $\mathbf{K}$</u> .

$\mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n, sur $\mathbf{K}$.

PREMIERE PARTIE : <u>Matrice compagne d'un endomorphisme cyclique</u>.

I 1) Montrer que f est cyclique si et seulement si, il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle f a pour matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & & -a_2 \\ \cdots & & & & \\ \cdots & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

avec $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$

On dira que C est la <u>matrice compagne</u> de f.

On conserve les notations de I.1

I 2 Soit $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$. Déterminer en fonction de Q, le polynôme P_C caractéristique de C.
On dira aussi que C est la <u>matrice compagne de P_C</u>.
Si f est un endomorphisme cyclique, a-t-on unicité de la matrice compagne de f ?

I 3 Soit λ une valeur propre de C ; déterminer la dimension du sous-espace propre associé. Déterminer une base de ce sous-espace propre.

<u>**DEUXIEME PARTIE**</u> : <u>Endomorphismes nilpotents</u>.

II 4 On suppose dans cette question $f^{n-1} \neq \mathbf{0}$ et $f^n = \mathbf{0}$.
Montrer que f est cyclique et déterminer sa matrice compagne.
Quelle est la dimension du noyau de f ?

II 5 On suppose maintenant f nilpotent ; c'est-à-dire qu'il existe un entier p supérieur ou égal à 2 tel que $f^{p-1} \neq \mathbf{0}$ et $f^p = \mathbf{0}$.
On pose pour $k \in [\![0, p]\!]$, $N_k = \operatorname{Ker} f^k$ et $n_k = \dim N_k$.

<u>On suppose également que $n_1 = 1$</u>.

5 a) Montrer que $\forall\, k \in [\![0, p-1]\!]$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $f(N_{k+1}) \subset N_k$.

5 b) En considérant l'application $\varphi : \left| \begin{array}{l} N_{k+1} \to N_k \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$

montrer que : $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $n_{k+1} \leq n_k + 1$.

5 c) Montrer par récurrence que : $n_k = n_{k+1} \Rightarrow \forall\, j \geq k,\ N_j = N_k$.

En déduire que $p = n$ et déterminer n_k pour $k \in [\![0, n]\!]$.

<u>**TROISIEME PARTIE**</u> : <u>Une caractérisation des endomorphismes cycliques</u>.

III 6 Montrer que si f est cyclique, $(I, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$. Ce résultat sera également utilisé dans la quatrième partie.

On suppose, dans cette partie, que $(I, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que f est cyclique.

III 7 Dans cette question $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. On factorise le polynôme caractéristique P_f de f sous la forme :

$$P_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k - X)^{m_k},$$

où les λ_k sont les p valeurs propres distinctes de f, et les m_k dans $\mathbf{N}^*$ leur ordre respectif de multiplicité.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $E_k = \operatorname{Ker}\left((f - \lambda_k \mathrm{I})^{m_k}\right)$.

7a) Montrer que les sous-espaces vectoriels E_k sont stables par f et que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.

7b) Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note φ_k l'endomorphisme :

$$\varphi_k : \begin{vmatrix} E_k \to E_k \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x. \end{vmatrix}$$

Déterminer $\varphi_k^{m_k}$. Quelle est la dimension de E_k ?

Montrer que $\varphi_k^{m_k - 1}$ n'est pas l'endomorphisme nul.

7c) En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle f a une matrice "diagonale par blocs", ces blocs

appartenant à $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbf{C})$, et étant de la forme : $\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & \lambda_k & & & & . \\ 0 & 1 & \lambda_k & & & . \\ . & & & & & \\ . & & & & \lambda_k & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$ (On pourra utiliser la partie II).

7d) En utilisant la matrice compagne de P_f, montrer que f est cyclique.

III 8) On suppose, <u>dans cette question uniquement</u>, que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

8a) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$: $A = QBQ^{-1}$ avec $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$

On écrit $Q = Q_1 + iQ_2$ avec Q_1 et Q_2 dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Montrer que $\{\lambda \in \mathbf{R} \ / \ Q_1 + \lambda Q_2 \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})\}$ est non vide.

En déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

8b) Montrer que f est cyclique.
Conclure.

<u>QUATRIEME PARTIE</u> : <u>Une autre caractérisation des endomorphismes cycliques</u>.

IV 9 On suppose f cyclique et on choisit x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

9 a) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. En écrivant $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0)$, montrer que $g \in \mathbf{K}[f]$.

9 b) Montrer que $g \in \mathcal{C}(f)$ si, et seulement si, il existe un unique polynôme $R \in \mathbf{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.
(On rappelle que $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ est l'ensemble des polynômes sur $\mathbf{K}$ de degré $\leq n-1$).

IV 10 On suppose que $\mathcal{C}(f) = \mathbf{K}[f]$. Montrer que f est cyclique.
Conclure.

CINQUIEME PARTIE : Cycles.

Dans cette partie $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. On dit que f est un "p-cycle" si, et seulement si, il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ soit génératrice de E et $f^p(x_0) = x_0$.

V 11 Dans cette partie, f désigne un p-cycle.

11 a) Montrer que $f^p = I$.

11 b) Soit $\mathcal{S} = \{ k \in \mathbf{N}^* \ / \ (x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0))$ est une famille libre$\}$

Montrer que $\mathcal{S}$ admet un maximum noté m.

11 c) Montrer que : $\forall k \geq m$, $f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.
En déduire que f est cyclique.
Déterminer le nombre de valeurs propres distinctes de f.

V 12 Dans cette question, f désigne un n-cycle.
Déterminer C, matrice compagne de f.

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et, pour $k \in \mathbb{Z}$, $U_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^k \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, calculer $C\, U_k$.

V 13 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ définie par $M = (m_{k,l})_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le l \le n}}$, avec $m_{k,l} = \overline{\omega}^{kl}$.

Calculer $M\overline{M}$; en déduire que $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$ et calculer M^{-1}.

V 14 Soit $(a_0, a_1, \dots a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_0 & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$

Montrer que A est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A.

FIN